

Sada domácích úkolů na implicitní funkce

1. Ukažte, že rovnice  $e^{xy} + \sin(x + y) = (1 - y)^2$  určuje v jistém okolí bodu  $(0, 0)$  implicitně zadanou funkci proměnné  $x$ . Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě  $0$ , ukažte že je tato funkce konvexní na nějakém okolí bodu  $0$  a napište její Taylorův polynom stupně  $2$  se středem v bodě  $0$ .
2. Ukažte, že rovnice  $\arctan(xyz^2) + \log(x^2 + y^2 + z^2) = 0$  určuje v jistém okolí bodu  $(0, 0, 1)$  implicitně zadanou funkci proměnných  $x$  a  $y$  mající totální diferenciál v bodě  $(0, 0)$ . Spočtěte  $d\varphi(0, 0)$ .
3. Ukažte, že soustava  $2 = xu^3 + y^2v^2$ ,  $3 = xu + 2yvu^2$  určuje v jistém okolí bodu  $(1, 1, 1, 1)$  implicitně zadané zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2$  (proměnných  $x$  a  $y$ ). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě  $(1, 1)$ .